MATHEMATICAL MODELS IN THE FUNCTION OF CREDIT RISK MANAGEMENT II

Kristina Zogović
University of Belgrade, Faculty of Economics, Serbia zogovic.kristina@gmail.com

Abstract: Risk is an integral part of every human being's life. When making decisions, we try to make the outcome as good as possible, but there is always a danger (risk), that is, the possibility of not achieving the planned (to be achieved partially or to lose something). Often, the risks and uncertainties are used interchangeably. One of the definitions of risk says that it is the uncertainty of future outcomes, the second definition could, however, be the risk of the probability of an unexpected outcome and so on. When using the term financial risk management, the most commonly referred to is the management of losses, i.e. to minimize them. Today, when the risk is an integral part of the business, companies, banks, individuals ... have to manage their own risks and adapt to market changes as effectively as possible. Contemporary institutions comprise a risk management sector. The risk is always present everywhere. There are many factors that influence the risk increase and make risk management more difficult. Throughout history, numerous economists and mathematicians have been trying (and trying) to find formulas and models that would adequately describe (model) the risks and thus enable better risk management. Motivation and perspectives in risk analysis are very important factors. Why do we need a model that measures the risk and estimates of the expected return? A good risk and return model provides us with risk measurement tools in any investment and we use this risk measurement to get the expected return on that investment. All models for risk assessment use reliability distributions in the function of finding the value of default. What makes risk measurement and expected returns so challenging is that they can vary depending on a variety of factors (Piccolo and Zaric, 2017), but also from which angle they are viewed. The question arises what are the characteristics of a good model for risk assessment and asset recovery. There is a very high risk and return model. There are many models for assessing credit risk. Three quantitative models for risk assessment are considered in this paper: One-factor Bernoulli mix model, Normal probability mix models and Beta mix models. When it comes to the single-factor Bernoulli mix model, only one factor and number of default (uncertainty that characterizes the ability of the company to service its debts and liabilities) N satisfies N | By ~ Binomial (n, f (Z)) distribution. In addition, the unconditional probability is only given for the default of the first to the borrower. Basel's formula for capital requirements as a part of total exposure for a homogeneous portfolio with individual default probability is obtained by using the normal probability mix model. In the beta mix of the model, we obtain that the default number has a beta-binomial distribution, and the expected number of default is easily calculated.
Keywords: risk, mathematical model, risk management.

MATEMATIČKI MODELI U FUNKCIJI UPRAVLJANJA KREDITNIM RIZICIMA I

Kristina Zogović
Univerzitet u Beogradu, Ekonomski fakultet, Srbija zogovic.kristina@gmail.com

Rezime: Rizik je sastavni dio života svakog čovjeka. Pri donošenju odluka trudimo se da ishod bude što je moguće bolji, ali uvijek postoji opasnost (rizik), tj. mogućnost da se ne ostvari planirano (da se ostvari djelimično ili da se nešto izgubi). Često se termini rizik i neizvjesnost koriste naizmjenično. Jedna od definicija rizika kaže da je on neizvjesnost budućih ishoda, druga definicija bi, pak, mogla biti da je rizik vjerovatnoća neočekivanog ishoda i tako dalje. Kada se koristi izraz upravljanje finansijskim rizicima, najčešće se pod tim misli na upravljanje gubicima, tj. na njihovo minimiziranje. Danas, kada je rizik sastavni dio poslovanja, kompanije, banke, pojedinci... moraju da upravljaju svojim rizicima i da se što efikasnije prilagode tržišnim promjenama. Savremene institucije u svom sastavu imaju sektor za upravljanje rizicima. Rizik je uvijek i svuda prisutan. Mnogo je faktora koji utiču na povećanje rizika i otežavaju upravljanje rizicima. Brojni ekonomisti i matematičari su kroz istoriju pokušavali (i pokušavaju) da pronađu formule i modele koji bi na adekvatan način opisali (modelirali) rizike i tako omogućili bolje upravljanje rizicima. Motivacija i perspektive u analizi rizika su veoma bitni faktori. Zašto nam je potreban model koji mjeri rizik i procjene očekivanog povrata? Dobar model za rizik i povrat sredstava obezbjeđuju nam alatke za mjerenje rizika u bilo kojoj investiciji i koristimo to mjerenje rizika da dođemo do očekivanog povrata od

tog ulaganja. Svi modeli za procjenu rizika koriste vjreovatnosne raspodjele u funkciji pronalaženja vrijednosti difolta. Ono što mjerenje rizika i očekivani povrat čini tako izazovnim je da oni mogu varirati u zavisnosti od niza različitih faktora (Piccolo and Zarić, 2017) ali i iz čijeg ugla su posmatrani. Postavlja se pitanje koje su karakteristike dobrog modela za procjenu rizika i povrata sredstava (Damodara, A, 2004). Postoji veoma mnogo rizika i modela povrata sredstava. Postoje mnogi modeli za procjenu kreditnog rizika. U ovom radu razmatraju se tri kvantitativna modela za procjenu rizika, i to: Jednofaktorski Bernulijevi miks model, Normalni vjerovatnosni miks modeli i Beta miks modeli. Kada je riječ o jednofaktorskom Bernulijevom miks modelu samo jedan faktor i broj difolta (neizvjesnost koja karakteriše sposobnost preduzeća da servisira svoje dugove i obaveze) N zadovoljava N | Z ∼Binomnu (n, f (Z)) raspodjelu. Osim toga, bezuslovna vjerovatnoća je data samo za difolt prvih k dužnika. Do „Bazelove formule“ za kapitalne zahtjeve kao dijela ukupne izloženosti za homogeni portfolio sa individualnom difolt vjerovatnoćom dolazimo pomoću normalnih vjerovatnosnih miuks modela. Kod beta miks modela dobijamo da broj difolta ima beta-binomnu raspodjelu i očekivani broj difolta se lako izračunava.

1. UVOD

Oduvijek i u svim sferama ljudskog djelovanja postojao je i postoji rizik. Ekonomisti i matematičari (ali i stručnjaci iz drugih oblasti) pokušavali su i pokušavaju da procijene rizik što bolje kako bi se smanjila vjerovatnoća grešaka i gubitaka. Veoma je bitno identifikovati sve (ili makar najveći broj) faktore koji utiču na rizik (Alexsande, C. 2015). Kroz istoriju su se razvijali mnogi modeli za procjenu rizika. Pojavom velikih kriza uvidjelo se da razvijeni modeli nisu dovoljno dobri i da se moraju unapređivati i prilagođavati novonastalim situacijama i promjenama.

2. MODELI PROCJENE KREDITNOG RIZIKA

Postoje razne vrste modela procjene kreditnog rizika. Na samom startu neophodno je pomenuti pojam difolt rizik (*Default risk*). To je neizvjesnost koja karakteriše sposobnost preduzeća da servisira svoje dugove i obaveze (*Andritzky, J.*,2014). U nastavku ćemo govoriti o tri modela procjene rizika, i to: Jednofaktorski Bernulijevi miks model, Normalni vjerovatnosni miks modeli i Beta miks modeli.

2.1. Jednofaktorski Bernulijevi miks modeli (*One-factor Bernoulli mixture models*)

U ovom dijelu razmotrićemo Bernulijev miks model kada je Z univarijatna, Z=Z,odnosno imamo samo jedan faktor i sve funkcije fi su jednake, fi = f. Ovo znači da su sve marginalne difolt vjerovatnoće i da broj difolta N zadovoljava N | Z ∼Binomna(n, f (Z)). Osim toga, bezuslovna vjerovatnoća je data samo za difolt prvih k dužnika što je dato sa:

$$
\begin{aligned}
&P(X_1= 1, \ldots , X_k= 1, X_{k+1}= 0, \ldots , X_n= 0)\\
&= E\,(P(X_1= 1, \ldots ,X_k= 1, X_{k+1}= 0, \ldots , X_n= 0|\, Z))\\
&= E(f(Z)^k(1 - f(Z))^{n-k}).
\end{aligned}
$$

Da bi se utvrdile bezuslovne default vjerovatnoće, broj difolta, itd. moramo da preciziramo raspodjelu funkcija G od Z. Dato G, bezuslovna vjerovatnoća[196] da je prvih k dužnika u difoltu, zadata je sa:
$P(X_1= 1, \ldots , X_k= 1, X_{k+1} = 0, \ldots , X_n= 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f\,(Z)^k(1 - f\,(Z))^{n-k})\,G(dz)$ i broj dužnika koji su u difoltu N ima bezuslovnu raspodjelu: $P(N = k) =\binom{n}{k} \int_{-\infty}^{\infty} f\,(Z)^k(1 - f\,(Z))^{n-k})\,G(dz)$.

Primijetimo još i sljedeće:
$$
\begin{aligned}
Cov(X_i, X_j) &= E(X_iX_j) - E(X_i)\,E(X_j\,)\\
&= E(E(X_iX_j|\,Z)) - E(E(X_i|\,Z))\,E(E(X_j|\,Z))\\
&= E(f\,(Z)^2) - E(f\,(Z))^2 = var(f\,(Z)).
\end{aligned}
$$

Imamo da važi $N = E(N\,|\,Z) + N - E(N\,|\,Z)$ i $E(N\,) = E(E(N\,|\,Z)) = n\,E(f\,(Z)) = np_1$,
$$
\begin{aligned}
var(N\,) &= E(var(N\ \,|\,Z)) + var(E(N\ \,|\,Z))\\
&= E(nf\,(Z)(1 - f\,(Z))) + var(nf\,(Z))\\
&= n\,E(f\,(Z)(1 - f\,(Z))) + n^2\,var(f\,(Z)).
\end{aligned}
$$

Primijetimo da iz Markove nejednakosti imamo

[196] ili marginalna vjerovatnoća je vjerovatnoća nezavisnog događaja jednog ishoda u uzorku od svih mogućih ishoda. Da biste pronašli bezuslovnu vjerovatnoću događaja, neophodno je sumirati rezultate ishoda i podijeliti sa ukupnim brojem mogućih ishoda.

P(|$N/n-f(Z)$|>ε|Z)≤$\frac{var(N/n|Z)}{\varepsilon 2}$ = $\frac{f(Z)(1-f(Z))}{n\varepsilon 2}$

Kako je ∀ε >0 to važi,

P(|N/n − f (Z)| > ε) = P(|N/n−f(Z)|>ε|Z)≤$\frac{E(f(Z)(1-f(Z)))}{n\varepsilon 2}$.

Kako N/n → P $\underset{\rightarrow}{f(Z)}$ za n → ∞ to je opravdana aproksimacija N/n ≈ f(Z) za veliko n (Tačnije važi da N/n → f(Z) za n → ∞)

2.2. Normalni vjerovatnosni miks modeli (Probit narmal mixture models)

U nekoliko portfolio kreditnih rizik modela difolt indikatore Xi, i = 1, . . . , n, reprezentujemo sa Xi = 1 ako $\sqrt{\varrho}$ Z +$\sqrt{1-\varrho}$Wi ≤ di1 , gdje je ϱ ∈ $[0,1]$ i Z, W1, . . . , Wn su identičke i standardne normalne raspodjele. Uzimajući jednake, pojedinačne vjerovatnoće difolta p = P(Xi= 1) dobijamo di1 = Φ−1(p), ali i

Xi= I(−∞,Φ−1(p)] ($\sqrt{\varrho}$ Z +$\sqrt{1-\varrho}$ Wi). Ovo daje: f(Z)=P(Xi=1|Z)= P($\sqrt{\varrho}$ Z+$\sqrt{1-\varrho}$ Wi ≤Φ−1(p)|Z) =

$$\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p)}{\sqrt{1-\varrho}} + \frac{\sqrt{\varrho}\,Z}{\sqrt{1-\varrho}}\right)$$

Iz ovoga slijedi:

VaR q (f (Z)) = Φ($\frac{\sqrt{\varrho}}{\sqrt{1-\varrho}}$ Φ−1(q) +$\frac{1}{\sqrt{1-\varrho}}$ Φ−1(p)).

Uzimajući da je q=0,999 i koristeći aproksimaciju N/n ≈ f (Z), dolazimo do „Bazelove formule“ za kapitalne zahtjeve (Hult, H., Lindski, F., 2007) kao dijela ukupne izloženosti za homogeni portfolio sa individualnom difolt vjerovatnoćom p: Kapitalni zahtjev = c1c2 [Φ ($\frac{\sqrt{\varrho}}{\sqrt{1-\varrho}}$ Φ−1 (0,999) +$\frac{1}{\sqrt{1-\varrho}}$ Φ−1(p) –p],

gdje je c1 izloženost gubitku u slučaju difolta i c2 je konstanta za prilagođavanje dospijeća. Koeficijentu ϱ je dodeljena vrijednost koja zavisi od vrste imovine, veličine i difolt vjerovatnoće dužnika.

2.3. Beta miks modeli (*Beta mixture models*)

Za Beta miks raspodjelu (Hult, H., Lindski, F., 2007) pretpostavljamo $Z \sim$ Beta(a, b) and $f(z) = z$.

Gustina je: g(z) = $\frac{1}{\beta(a+b)}$ z $^{a-1}$(1-z) $^{b-1}$, a,b>0, $z \in (0, 1)$,

gdje je: $\beta(a,b) = \int_0^1$ z $^{a-1}$(1-z) $^{b-1}$dz = $\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

U skladu sa navedenim važi i: $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$,

$$E(Z) = \frac{1}{\beta(a+b)}\int_0^1 z^{a}(1-z)^{b-1}\,dz$$
$$= \frac{\beta(a+1,b))}{\beta(a,b)}$$
$$= \frac{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$
$$= \frac{a}{a+b},$$
$$E(Z^2) = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}.$$

Odmah dobijamo da broj difolta N ima raspodjelu,

$$P(N=k) = \binom{n}{k}\int_0^1 z^{k}(1-z)^{n-k} g(z)dz$$
$$= \binom{n}{k}\frac{1}{\beta(a+b)}\int_0^1 z\, a^{a+k+1}(1-z)^{n-k+b-1}\,dz$$
$$\beta(a+b)$$
$$= \binom{n}{k}\frac{\beta(a+k,b+n-k)}{\beta(a+b)},$$

koja se još naziva i beta-binomna raspodjela. Očekivani broj difolta se lako izračunava.

$$E(N) = E(E(N \mid Z)) = n\,E(E(X_1 \mid Z)) = n\,E(Z) = n\frac{a}{a+b}$$

Ako su očekivane difolt vjerovatnoće P(X_i= 1) and P(X_i= X_j= 1), if= j, tada parametri a i b mogu biti određeni iz sistema:

P(X_i= 1) = E(Z) = $\frac{a}{a+b}$, P(X_i= X_j= 1) = E(Z^2) = $\frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$

Osim toga, linearni korelacioni koeficijent$\varrho_L(X_i, X_j) = (a+b+1)^{-1}$.

Ako specificiramo pojedinačne vjerovatnoće difolta p i linearni korelacioni koeficijent ϱ, tada dobijamo parametre a i b Beta raspodjele kao funkcije od (p,ϱ):

$$a = (1-p)\frac{1-\varrho}{\varrho}, \qquad b = p\frac{1-\varrho}{\varrho}$$

Primjer 1. Primijetimo da ako specifikujemo individualne difoltne vjerovatnoće
$p = P(Xi = 1)$, tada znamo veoma malo o modelu.
Na primjer, $p = 0.01 = a/(a + b)$ za $(a, b) = (0.01, 0.99); (0.1, 9.9); (1, 99)$, ali odabir različitih (a,b) za posljedicu ima upotrebu veoma različitih modela. Ovo je prikazano u tabeli ispod, u kojoj se razmatra portfolio od n=1000 dužnika.

Tabela 1. Uticaj odabira različitih (a,b)

(a,b)	P	corr(X_i, X_j))	$\text{VaR}_{0.99[9]}(N)$	$\text{VaR}_{0.99[9]}(nZ)$
(1,99)	0.01	0.01	47 [70]	45 [67]
(0.1,9.9)	0.01	0.09	155 [300]	155 [299]
(0.01,0.99)	0.01	0.5	371 [908]	371 [908]

Uočimo još koliko je važna aproksimacija $N \approx nZ$!
Primjer 1. ilustruje da same specifične, individualne vjerovatnoće difolta p veoma malo govore o raspodjeli vrijednosti N. Primijetimo da svaki izbor $(a, b) = \lambda(1, (1 - p)/p)$, $\lambda > 0$, određuje vjerovatnoću difolta p.
Neka $Z\lambda$ ima Beta(λ, $\lambda(1 - p)/p$)- raspodjelu. Tada, za $\forall\varepsilon > 0$,

$$P(|Z_\lambda - p| > \varepsilon) \leq \frac{VaR(Z\lambda)}{\varepsilon^2} = \frac{p}{\varepsilon^2}\left(\frac{\lambda p+p}{\lambda+p} - p\right) \to 0, \text{ za} \lambda \to \infty.$$

Kako važi: $Z_\lambda \to p$ za $\lambda \to \infty$, to ovdje implicira, uz pretpostavku da je N_λ, ukupan broj difolta: $P(N_\lambda = m) = E(\binom{n}{m} Z_\lambda^m (1 - Z_\lambda)^{n-m}) \to \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$, za $\lambda \to \infty$,
ili ekvivalent da N_λ konvergira u Binom(n,p)-raspodjeli, pri čemu slučajna promjenjiva $\lambda \to \infty$.

ZAKLJUČAK

Automatizacija investicija, zasnovana na striktnim matematičkim ili fundamentalnim analitičkim metodama, ne pobija činjenicu da, ipak, odluke donose ljudi (Piccolo and Zaric, 2017), a to znači da su greške i moguće i sasvim očekivane. Tržišna efikasnost ne zadovoljava kriterijume koje podrazumijeva savršena efikasnost. Određivanje cijena akcija bi trebalo da bude u sistemu univerzalno prihvaćenih sistema analize, univerzalne brzine i naprednog pristupa analizi. Modeli se moraju unapređivati i korigovati shodno činjenici da su promjenjivost i nepredvidljivost jedine izvjesne. Tri modela navedena u radu iznjedrila su čitav niz modela, (Jorion, P., 2007).

LITERATURA

[1] Alexande, C., “Managing Operational Risks with Bayesian Networks”, Mc Graw Hill, 2015
[2] Andritzky, J., “Sovereign Default, Risk Valuation, Implications of Debt Crises and Bond Restructurings”, 2014
[3] Barth, J., Caprio, G., Jr. i Levine, R., “Banking Systems around the Globe: Do Regulation and Ownership? Affect Performance and Stability?”, Mc Graw Hill, 2013
[4] Grody, A., Hughes, J. i Tom, S., “Risk Accounting: A Next Generation Risk Management System for Financial Institutions”, Mc Graw Hill, 2012
[5] Damodara, A., “Applied Corporate Finance”, Second Edition, 2004
[6] Jorion, P.,” Value at Risk”, 3 -rd edition, Mc Graw Hill, 2007
[7] Jorion, P.,” Financial Risk Management Handbook”, 2nd edition John Wiley, 2009
[8] King, J., “Operational Risk: EVT Models”, Genoa (UK), 2014
[9] Kozarević , E.,“**VaR** pristup evaluaciji kreditnog rizika banaka (kreditni VaR modeli)“, pregledni rad
[10] Lakić, S. i Živković, A., “Validnost kvantitativnih modela u finansijskoj industriji u kontekstu finansijske krize”, , *JEL Classification: G 21; O 16; Original scientific paper, Received: November* 12, 2010

[11] Martellini, L., Priaulet,P. and Priaule, S., “Fixed-Income Securities Valuation, Risk Management and Portfolio Strategies”, 2011
[12] Mišić, V., “Interni modeli upravljanja kreditnim rizikom“,UDK 005.334:336,71, naučni rad
[13] McNeil, F., „Copulas and kredit risk models“, Risk Magasine (2002)
[14] Piccolo, R., Zaric, S., (2017), Behaviour finance approach to suboptimal choices in banking business: Empirical evidence from Serbia, Knowledge International Journal Vol 19.2 , pp 477-485.
[15] Freixas, X. i Rochet, Jean-Charles Crisil, R. “Microeconomics of Banking Second Edition”,
a. Ravimohan, 2004
[16] Hillier, F., Lieberman, G., “Introduction to operations research”, 7-rd edition,
[17] *Hult, H. i Lindski, F., “Mathematical Modeling and Statistical Methods for Risk Management”, Lecture Notes, 2007*
[18] *„Copulas and kredit risk models“, Frey, McNeil, Risk Magasine (2002)*
[19] Crouhy, Galai, Mark *„Risk managment“, (2006)*